СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ КЛАССАМИ ЗАЯВОК И ПОТЕРЯМИ НА ПЕРЕКЛЮЧЕНИИ КАНАЛА

А. Б. Осипов (Омск)

На вход системы массового обслуживания (СМО) поступают заявки n типов с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda n$. СМО имеет один канал, который обслуживает заявки за время $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Обслуживание происходит в режиме «без потерь», т. е. все поступающие заявки в случае занятости канала ожидают его освобождения в очереди. Заявки обслуживаются в соответствии с дисциплиной FIFO [1]. Для перехода от обслуживания заявки i-го класса к обслуживанию заявки j-го класса ($i \neq j$) канал затрачивает дополнительное время s на операцию *переключения*. Схема СМО представлена на рис. 1.

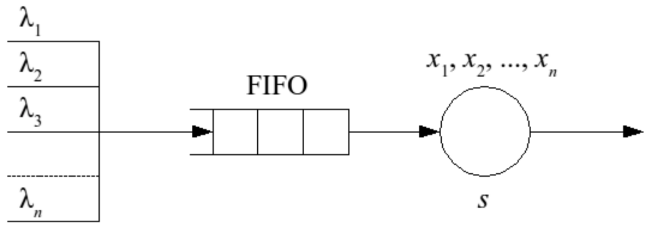

Рис. 1. СМО с несколькими классами заявок и потерями на переключении канала

Подобной СМО можно представить многие практические задачи, в которых устройство (канал) перед началом обслуживания нового типа заявок должно быть некоторым образом подготовлено. Примерами таких задач являются (в скобках указана операция, соответствующая этапу подготовки):

– конвейерная сборка изделий разных типов (настройка сборочного робота);

– стрельба по мишеням (прицеливание по мишени);

– считывание данных из разных областей жесткого диска (перемещение механизма доступа к началу области).

При $s = 0$ коэффициент загрузки такой СМО равен сумме коэффициентов загрузки по каждому из потоков:

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i . \qquad (1)$$

Загрузка СМО со стороны каждого отдельного потока вычисляется по классической формуле [2]:

$$\rho = \lambda \cdot x. \qquad (2)$$

В случае $s > 0$ часть рабочего времени канал находится в фазе *переключения*, что приводит к увеличению общего коэффициента загрузки СМО.

Можно показать, что полное значение коэффициента загрузки для СМО с потерями на переключении канала вычисляется по формуле:

$$R = R_0 + s \cdot \sum_{i=1}^{n} \min(\lambda_i, \Lambda - \lambda_i), \qquad (3)$$

где $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. (4)

В формуле (3) первое слагаемое характеризует загрузку канала *основной* работой по обслуживанию заявок, а второе слагаемое – загрузку канала, связанную с затратами на его *переключение* в случае, когда тип следующей заявки отличается от типа предыдущей. Характерно, что второе слагаемое зависит только от интенсивностей поступления заявок λ_i и не зависит от времени их обслуживания x_i.

Чтобы показать влияние взаимной величины интенсивностей поступления заявок на общую загрузку системы, проведем следующий аналитический эксперимент. В формуле (3) примем $R_0 = \text{const}$, $\Lambda = \text{const}$ и будем изменять значение λ_k, $1 \le k \le n$. Так как по условию $\Lambda = \text{const}$, изменение λ_k приведет к пропорциональному изменению остальных значений λ:

$$\lambda_i = (\Lambda - \lambda_k) / (n - 1),\ i \ne k. \tag{5}$$

Кроме того, для удовлетворения условия $R_0 = \text{const}$, учитывая (1) и (2), потребуется пропорционально изменять время обслуживания заявок x_i, что в общем случае нежелательно, так как это приведёт к нарушению исходных пропорций между x_i и s. Для сохранения указанных пропорций можно ввести дополнительную величину – *производительность* канала μ, а для характеристики *времени обслуживания* заявок и *времени переключения* использовать понятие *трудоемкости* соответствующих операций:

$$x_i = \theta_i / \mu; \tag{6}$$

$$s = \theta_s / \mu, \tag{7}$$

где θ_s – трудоемкость операции переключения; θ_i – трудоемкость обслуживания заявок i-го типа.

Подставив (2) и (6) в (1), получим:

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{\mu} \cdot \lambda_i\ , \tag{8}$$

откуда можно выразить μ:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \lambda_i}{R_0}. \tag{9}$$

Таким образом, задавшись конкретными значениями R_0, Λ, $\theta_1 - \theta_n$, θ_s, используя формулы (3), (5), (7) и (9), можно построить график зависимости $R(\lambda_k)$. График, полученный для параметров, указанных в таблице, при $k = 2$ и $\lambda_2 \in [0;9]$ показан на рис. 2. На этом же рисунке по правой шкале показана зависимость $\mu(\lambda_k)$.

Исходные параметры эксперимента

Параметр	n	R_0	Λ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_s
Значение	3	0,5	9	6	2	3	2

График зависимости $R(\lambda_2)$, изображенный на рис. 2, имеет «излом» в точке $\lambda_2 = 4{,}5$. Возрастание *загрузки* R слева от этой точки обусловлено постоянно убывающей *производительностью* канала $\mu(\lambda_2)$ и, как следствие, возрастающим *временем переключения* s. Падение *загрузки* справа от точки излома идет в разрез с возрастанием *времени переключения*. Учитывая введенные ограничения ($R_0 = \text{const}$, $\Lambda = \text{const}$), такое падение загрузки R возможно лишь в случае сильного уменьшения значения суммы минимумов в формуле (3).

Характерно также, что $R(\Lambda) = R_0$. В этом случае интенсивности прочих потоков равны нулю, и фаза *переключения* канала никогда не наступает, так как фактически в систему поступают заявки только одного типа.

Проведенный эксперимент позволяет сделать вывод о том, что в рассматриваемых СМО влияние на загрузку системы, вызванную потерями на переключении канала, оказывают не только абсолютные значения интенсивностей входных потоков, но и их значения относительно друг друга.

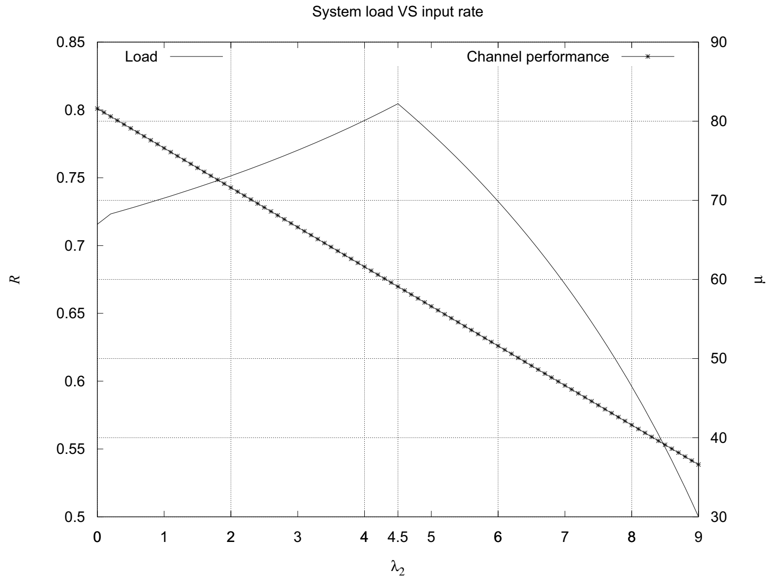

Рис. 2. Влияние взаимных значений интенсивностей на загрузку СМО

Кроме того, можно показать, что сумма минимумов в формуле (3) всегда сходится к одной из двух величин:

$$\sum_{i=1}^{n} \min(\Lambda - \lambda_i, \lambda_i) = \Lambda, \text{если} \forall k \lambda_k \le \frac{\Lambda}{2}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \min(\Lambda - \lambda_i, \lambda_i) = 2(\Lambda - \lambda_k), \text{если } \exists k \lambda_k > \frac{\Lambda}{2}. \tag{11}$$

График $R(\lambda_2)$ на рис. 2 левее точки излома $\lambda_2 = \Lambda / 2 = 4{,}5$ соответствует выражению (10), правее этой точки – выражению (11). Таким образом, влияние фазы *переключения* на загрузку СМО можно уменьшить за счет подбора таких интенсивностей входных потоков, чтобы выполнялось условие $\exists k \lambda_k > \Lambda / 2$. Чем данное неравенство сильнее, тем меньшее влияние на загрузку СМО оказывают потери на операции *переключения* канала.

Справедливость формулы (3) и выражений (10)–(11) можно проверить с помощью имитационного моделирования.

Построение имитационной модели СМО типа D|D|1 на языке GPSS не представляет сложности и может быть выполнено согласно [3]. Модель СМО с несколькими классами заявок и потерями на переключении канала отличается от нее:

– наличием нескольких входных потоков заявок (не менее двух);

– необходимостью отслеживания номера потока последней выполненной заявки.

Каждому входному потоку заявок соответствует следующий фрагмент кода на GPSS:

```
             GENERATE V$GEN1,0
             QUEUE 1
             SEIZE 1
             DEPART 1
             TEST NE X$FLOW,1,SKIPPREP1
             ADVANCE V$SETTIME,0
SKIPPREP1    SAVEVALUE FLOW,1
             ADVANCE V$TIME1,0
             RELEASE 1
             TERMINATE 1
```

Сохраняемая величина FLOW используется для хранения типа заявки, занимающей канал. Начальное значение этой величины равно нулю и не совпадает ни с одним типом. При освобождении канала величина FLOW не изменяется и, таким образом, хранит тип последней обслуженной заявки.

В блоке TEST тип пришедшей заявки сравнивается со значением из FLOW. Если типы заявок отличаются, то выполняется следующий блок – ADVANCE, который задерживает движение заявки на время V$SETTIME, моделируя тем самым фазу переключения канала на обслуживание заявок другого типа. Если же типы заявок совпадают, то заявка пропускает первый блок ADVANCE и переходит к метке SKIPPREP1.

Блок SAVEVALUE записывает тип заявки в сохраняемую величину FLOW, после чего заявка попадает во второй блок ADVANCE, который моделирует этап обслуживания заявки.

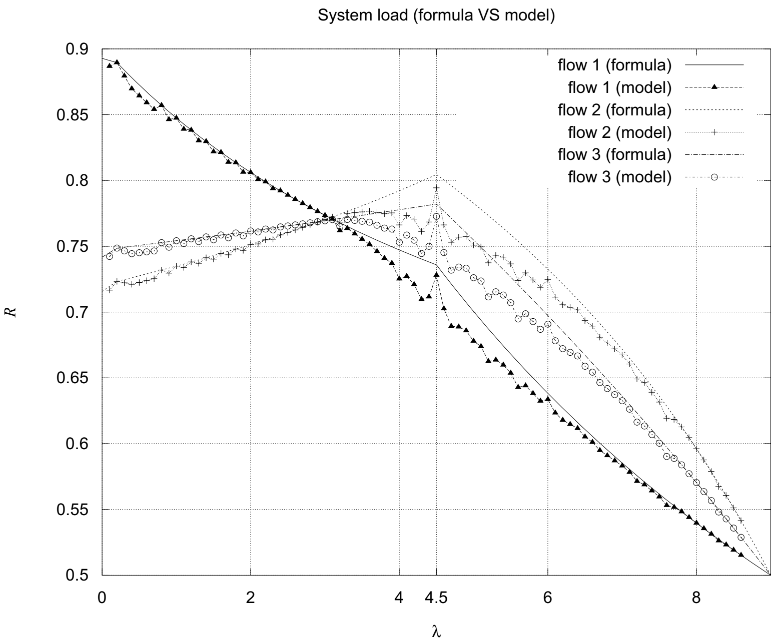

Рис. 3. Результаты имитационного моделирования

Переменные V$GEN1, V$TIME1 и V$SETTIME соответствуют значениям $1 / \lambda_1$, x_1 и s. Аналогичные переменные используются и для всех остальных потоков заявок.

С использованием построенной модели была проведена серия имитационных экспериментов по измерению коэффициента загрузки канала СМО с параметрами из таблицы. В процессе эксперимента были получены коэффициенты загрузки канала R для $\lambda_k \in [0{,}1; 8{,}6], k = \overline{1, n}$.

Зависимости $R(\lambda_k)$, $k = 1..n$, построенные по результатам имитационного моделирования и по формуле (3), изображены на рис. 3.

На рисунке видна точка пересечения всех графиков при $\lambda_k = 3$. Эта точка соответствует ситуации, когда интенсивности трех входящих потоков одинаковы. Экспериментальные и аналитические значения загрузки СМО левее этой точки практически совпадают. Справа от нее значения, рассчитанные по формуле (3), незначительно превышают значения, полученные экспериментальным путём. При дальнейшем увеличении λ_k результаты вновь сходятся. Кроме того, в точке $\lambda_k = \Lambda / 2 = 4{,}5$ ярко выражен всплеск экспериментальных значений, которые приближаются к расчетным.

Вид зависимости, полученной с помощью формулы (3), соответствует экспериментальным данным. Абсолютные значения, полученные по формуле (3), соответствуют экспериментальным данным не на всем протяжении области определения. На тех участках, где расчетные значения не совпадают с экспериментальными, последние всегда меньше первых, что делает возможным использование выражения (3) в качестве верхней оценки коэффициента загрузки подобных СМО.

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

– коэффициент загрузки рассматриваемых СМО, связанный с потерями на переключении канала, определяется не только абсолютными значениями интенсивностей входных потоков, но и их отношением между собой;

– при проектировании подобных СМО следует стремиться к тому, чтобы интенсивность одного из входных потоков превышала половину общей интенсивности всех входных потоков: чем сильнее превышение, тем меньшее влияние на коэффициент загрузки СМО оказывают потери на переключении канала;

– выражение (3) может быть использовано для приблизительного расчета коэффициента загрузки СМО с потерями на переключении канала, а также в качестве оценки верхней границы этой величины;

– предложенная имитационная модель позволяет исследовать СМО с потерями на переключении канала как теоретически, так и применительно к отдельным практическим задачам.

Литература

1. Основы теории вычислительных систем / Под ред. С. А. Майорова. Учеб. Пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1978. 408 с.
2. **Советов Б. Я., Яковлев С. А.** Моделирование систем: Учеб. для вузов М.: Высш. шк., 2001. 343 с.
3. **Задорожный В. Н.** Имитационное и статистическое моделирование Омск: Изд-во ОмГТУ, 2007. 131 с.