

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ БУФЕРОВ ФРАКТАЛЬНЫХ СМО**В. Н. Задорожный (Омск), О. И. Кутузов (Санкт-Петербург)****Введение**

Основной особенностью трафика современных телекоммуникационных сетей с коммутацией пакетов является его масштабная инвариантность (фрактальность), оказывающая существенное влияние на качество связи [1–3]. Исследования трафика концентрируются вокруг статистических характеристик очередей, поскольку буферизация сообщений рассматривается как основная обеспечивающая ресурсами стратегия. Эта область исследований характеризуется в [3] следующим образом: «В 1993 г. сенсацией в области моделирования характеристик сетей стал доклад, представленный специалистами из компании BellCore и Бостонского университета ... Этот доклад под названием "О фрактальной природе трафика в Ethernet", по мнению некоторых специалистов, явился наиболее значительной работой по вычислительным сетям за последние десять лет ... Результаты нового взгляда на природу сетевого трафика... означают, например, что целая область проектирования компьютерных устройств – построение буферов и управление ими – нуждается в радикальном пересмотре... Однако среди специалистов пока нет единого мнения о том, какие математические инструменты применимы и эффективны для его исследования и прогнозирования. Их разработка должна стать следующим важным шагом в этой области».

Фрактальные, т.е. степенные или асимптотически-степенные [4] распределения – это распределения с тяжелыми хвостами (РТХ). В книге [5] в числе перспективных моделей теории массового обслуживания упоминаются «модели с "тяжелыми хвостами" распределений, характеризующих входящий поток и процесс обслуживания».

В докладе рассматриваются специфические проблемы имитационного моделирования (ИМ) фрактальных сетей массового обслуживания (СМО) и предлагается ускоренный метод расчета их буферов.

Проблема корректной реализации фрактальных распределений

При ИМ реализация фрактальных распределений сопряжена со специфическими трудностями вычислительного характера. Поясним их на примере распределения Парето $Pa(K, \alpha)$, описываемого плотностью вероятностей (п.в.):

$$f(t) = \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad t \geq K, \quad (1)$$

где α – параметр формы, $K > 0$ – минимум случайной величины x (масштабный параметр). Соответствующая функция распределения (ф.р.) имеет вид:

$$F(t) = 1 - (K/t)^\alpha, \quad t \geq K. \quad (2)$$

С учетом (1) k -й начальный момент распределения Парето (РП) выражается в виде:

$$M(x^k) = \int_K^\infty t^k f(t) dt = \begin{cases} \frac{\alpha K^k}{\alpha - k}, & \alpha > k, \\ \infty, & \alpha \leq k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Отсюда при $\alpha > 1$ находим конечное среднее (м.о.) $M(x) = \alpha K / (\alpha - 1)$, при $\alpha > 2$ – конечную дисперсию $D(x) = M(x^2) - M^2(x) = \alpha K^2 / (\alpha - 1)^2 / (\alpha - 2)$.

Сгенерируем на GPSS посредством функции $\text{Pareto}(1, 1, 1.1)$ 100 млн. независимых значений случайной величины (сл.в.) $x \in \text{Pa}(K, \alpha)$ при $K = 1$, $\alpha = 1.1$ и вычислим статистические оценки M^* и σ^* для м.о. $M(x)$ и среднеквадратичного отклонения σ_x . Согласно (3) $M(x) = 11$ и $\sigma_x = \infty$. Но получаемые оценки $M^* \approx 7.5$ и $\sigma^* \approx 380$ сильно отличаются от приведенных точных значений. Заметим, что стократно более короткая выборка из 1 млн. значений экспоненциальной сл.в. дает оценки для ее среднего и дисперсии с тремя точными значащими цифрами. Причиной больших ошибок (не вполне очевидной) здесь является дискретизация представления непрерывной сл.в. x .

Действительно, для реализации сл.в. $x \in \text{Pa}(K, \alpha)$, обращая ф.р. (2), получаем формулу $x = K / \sqrt[\alpha]{1-z}$, или, проще, $x = K / \sqrt[\alpha]{z}$, где $z \in \text{R}(0, 1)$ – базовая сл.в., равномерно распределенная на отрезке $(0, 1)$. Так, в GPSS функция $\text{Pareto}(1, 1, 1.1)$ вычисляет и возвращает число $(1 / ((\text{Uniform}(1, 0, 1))^{(1/1.1)}))$ (если на выходе датчика Uniform появляется нуль, он функцией пропускается). Степень дискретизации сл.в. $x \in \text{Pa}(K, \alpha)$ определяется шагом ε дискретизации сл.в. z в датчике $\text{Uniform}(1, 0, 1)$. Этот шаг составляет 0.000001 , и $\text{Uniform}(1, 0, 1)$ выдает значения $z_i \in \{0.000000, 0.000001, 0.000002, \dots, 0.999999\}$, выбираемые случайно и равновероятно. В результате функция $\text{Pareto}(1, 1, 1.1)$ вместо непрерывной сл.в. $x \in \text{Pa}(K, \alpha)$ при $K = 1$, $\alpha = 1.1$ реализует некоторую дискретную сл.в. y с параметрами:

$$M(y) = \sum_{i=1}^{999999} p_i y_i = \frac{1}{999999} \sum_{i=1}^{999999} \frac{K}{\sqrt[\alpha]{z_i}} \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[1.1]{10^{-6}i}} = \varepsilon \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[1.1]{\varepsilon \cdot i}} = 8.0296,$$

$$D(y) \approx \varepsilon \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \left[\frac{1}{\sqrt[1.1]{\varepsilon \cdot i}} \right]^2 - M^2(y) = 150449.7, \quad \sigma_y = \sqrt{D(y)} = 387.9. \quad (4)$$

К этим $M(y)$, σ_y и приближаются оценки $M^* \approx 7.5$, $\sigma^* \approx 380$ в описанном выше эксперименте с выборкой 100 млн. чисел из РП. В табл. 1 моменты сл.в. y , реализующей сл.в. $x \in \text{Pa}(K, \alpha)$ при $K = 1$, $\alpha = 1.1$, рассчитаны по формулам (4) для различных ε .

Таблица 1

Характеристики сл.в. y , реализующей сл.в. $x \in \text{Pa}(1, 1.1)$

ε	$M(y)$	$D(y)$	σ_y	$\Delta M = 11 - M(y)$
10^{-4}	6.485	3433.8	58.6	4.515
10^{-5}	7.338	22821.9	151.1	3.662
10^{-6}	8.030	150449.7	387.9	2.970
10^{-7}	8.591	990215.9	995.1	2.409
10^{-8}	9.046	6515370.2	2552.5	1.954

Из таблицы можно видеть, что $M(y)$ и σ_y с уменьшением ε приближаются к параметрам $M(x) = 11$ и $\sigma_x = \infty$. В GPSS можно обеспечить шаг $\varepsilon = 10^{-12}$, реализуя сл.в. z выражением $(\text{Uniform}(1, 0, 1) + 1E-6 \# \text{Uniform}(1, 0, 1))$, которое возвращает равновероятные $z_i \in \{0.000000000000, 0.000000000001, \dots, 0.999999999999\}$, и даже шаг $\varepsilon = 10^{-15}$. Но более мелкий шаг превращается в «машинный нуль». Найдем наибольшее

ε , обеспечивающее «приемлемую» погрешность $\Delta M = 11 - M(y) = 0.001$. Для этого нужно продолжить расчеты в табл. 1 до значений $\varepsilon = 10^{-12}$, 10^{-15} и далее. Однако при таких значениях ε расчеты по формулам (4) становятся слишком трудоемкими. Расчет сумм для $10^{12} \div 10^{15}$ слагаемых требует от нескольких дней до нескольких лет машинного времени.

Выполним расчеты следующим образом. Часть зависимости $\Delta M(\varepsilon)$, представленная в табл. 1, отображается пятью точками графика, при логарифмическом масштабе шкал лежащими на идеальной прямой. Это свидетельствует о степенной (в рассматриваемом диапазоне) зависимости между ΔM и ε . Степенная аппроксимация

$$\Delta M(\varepsilon) = 10.433 \cdot \varepsilon^{0.0909} \quad (5)$$

при ее использовании для расчета пяти значений ΔM , представленных в табл. 1, характеризуется погрешностями, примерно равными единице их младшего разряда. По формуле (5) находим $\Delta M(10^{-12}) = 0.846$, и $\Delta M(10^{-15}) = 0.452$. Итак, ΔM при $\varepsilon = 10^{-12}$ и даже при $\varepsilon = 10^{-15}$ в сотни раз (!) превышает «приемлемую» погрешность. Используя (5), требуемое ε найдем из уравнения $\Delta M = 10.433 \varepsilon^{0.0909} = 0.001$. Решая это уравнение, определяем $\varepsilon \approx 6.21 \cdot 10^{-45} \approx 2^{-147}$. Отсюда видно, что дискретность вещественных чисел, представимых в обычной 32-разрядной машинной арифметике, не позволяет обеспечить «приемлемую» погрешность реализации сл.в. $x \in Pa(K, \alpha)$ при $K = 1$, $\alpha = 1.1$.

Таким образом, одной из первоочередных задач при ИМ фрактальных СМО, является задача корректной реализации фрактальных распределений.

Моделирование систем M|Pa|1, Pa|M|1 и фрактальных потоков

В позициях обозначений Кендалла будем РП указывать в виде Pa. При сопоставлении результатов ИМ систем M|Pa|1, Pa|M|1 и, особенно, систем Pa|Pa|1 с точным анализом их характеристик (там, где такой анализ возможен) обнаруживаются специфические проблемы, отсутствующие в «классическом» опыте ИМ СМО.

1. В системе M|Pa|1 при $K = 1$, $\alpha = 1.1$ и $\rho = 0.5$ ($\lambda = \rho/M(x) = 1/22$) средняя длина очереди $L = \infty$ (причем $L = \infty$ при любом $\rho > 0$, поскольку $M(x^2) = \infty$). При ИМ этой СМО на GPSS с обычным шагом дискретизации $\varepsilon = 10^{-6}$ оценка для ρ сходится приблизительно к 0.36 (не к истинному значению $\rho = 0.5$), а оценка для L – приблизительно к 250. Но при параметрах *реализованного* времени обслуживания y (табл. 1, см. строку $\varepsilon = 10^{-6}$), действительно, $\rho = \lambda M(y) \approx 0.36$, и (по формуле Хинчина) $L = 244.9 \approx 250$.

Если при $K = 1$ задать $\alpha = 2.1$ ($\rho = 0.5$, $\lambda = 11/42$, $L = 1.19$), то ИМ дает для ρ оценку 0.5 (верную), но для L – заниженную оценку 0.72. Оценка для L «выправляется» лишь при $\alpha > 3$. Занижение оценки для L – следствие занижения дисперсии сл.в. x .

2. В системе Pa|M|1 при бесконечной дисперсии длительности τ интервалов поступления средняя длина очереди L конечна (если $\rho < 1$). Сравнение результатов ИМ системы Pa|M|1 и точных (численных) решений приводится в табл. 2 (рассчитаной в [6]). Здесь $\tau \in Pa(1, \alpha)$. Уравнение для расчета L , включающее преобразование Лапласа-Стилтьеса от ф.р. (2), решается в [6] численным методом. При $\alpha = 1.1$ оценка $\rho_{ИМ}$ завышается пропорционально занижению $M(\tau)$, т.е. (см. табл. 1) в $11/8.03 = 1.36$ раза. Завышенная загрузка $\rho_{ИМ}$ при достаточно больших ρ влияет на оценку $L_{ИМ}$ сильнее, чем занижение (бесконечное) дисперсии сл.в. τ , и оценка $L_{ИМ}$ для L завышается. Критической загрузкой ρ , при которой $\rho_{ИМ} \rightarrow 1$ и $L_{ИМ} \rightarrow \infty$, является $\rho = 8.03/11 = 0.73$.

3. При суммировании N потоков с РП интервалов τ при $\alpha \leq 1$, т.е. с бесконечным (в ИМ – очень большим) м.о. $M(\tau)$, или при $1 \leq \alpha \leq 2$, т.е. только с бесконечной дисперсией $D(\tau)$, многие статистические характеристики суммарного потока (например, коэффициент вариации) с ростом N сближаются с характеристиками пуассоновского по-

тока. При этом график эмпирической ф.р. интервалов суммарного потока визуально хорошо совмещается с графиком экспоненциального распределения. Однако в имитационной модели при направлении суммарного потока на вход СМО с экспоненциальным временем обслуживания средняя длина очереди оказывается на порядки более высокой, чем в системе $M|M|1$, которая бы сформировалась, если бы суммарный входной поток был действительно пуассоновским. Таким образом, сумма фрактальных потоков в общем случае к пуассоновскому потоку не сходится. Случайное их прореживание – тоже: точные соотношения [7] показывают, что если первый (второй) момент прореживаемого потока бесконечен, то и первый (второй) момент прореженного – тоже бесконечен.

Таблица 2

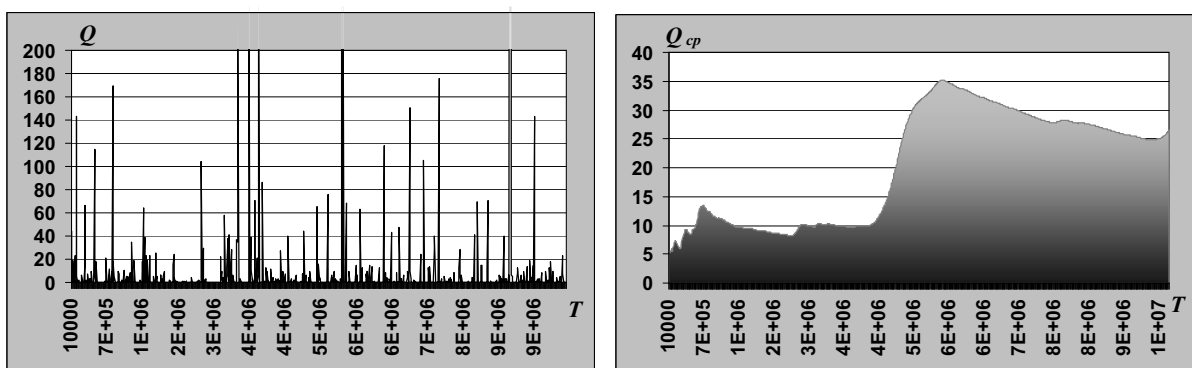
Сравнение оценок $\rho_{\text{ИМ}}$ и $L_{\text{ИМ}}$ с точными значениями ρ и L

ρ	$\alpha = 2.1, M(\tau) = 1.90909$			$\alpha = 1.1, M(\tau) = 11$		
	$\rho_{\text{ИМ}}$	L	$L_{\text{ИМ}}$	$\rho_{\text{ИМ}}$	L	$L_{\text{ИМ}}$
0.1	0.100	0.0001	0.0001	0.136	0.035	0.047
0.2	0.200	0.0067	0.007	0.275	0.369	0.505
0.3	0.300	0.0364	0.036	0.402	2.037	2.733
0.4	0.400	0.1106	0.111	0.532	10.75	14.409
0.5	0.500	0.2635	0.264	0.673	49.81	98.139
0.6	0.600	0.5640	0.564	0.831	251.2	859.316

Система Pa|Pa|1

Типовая модель узла сети с фрактальным трафиком – это СМО с фрактальными распределениями, характеризующими как входящий поток, так и процесс обслуживания, имеющая $n \geq 1$ каналов, – например, СМО типа Pa|Pa|n|k. Специфику моделирования таких СМО можно показать на примере системы Pa|Pa|1 с интервалами поступления $\tau \in \text{Pa}(1, 1.1)$ и временем обслуживания $x \in \text{Pa}(1, 1.5)$.

На рис. 1 слева показано изменение длины Q очереди в этой СМО. Значения Q , взятые в точках $t = 10$ тыс., 20 тыс., ..., получены путем ИМ, при шаге дискретизации $\varepsilon = 10^{-12}$. Справа на рисунке для тех же t представлен процесс $Q_{\text{cp}}(t)$, полученный усреднением 50 независимых траекторий оценки для L (атрибута QAj в GPSS). Очевидным является резкое отличие этих характеристик системы Pa|Pa|1 от характеристик классических СМО типа M|M|1. Заметим, что в моделируемой СМО Pa|Pa|1 $\rho = 0.3$.

Рис. 1. Изменение длины Q очереди фрактальной СМО и оценки Q_{cp}

Ускоренный метод расчета буферов фрактальных СМО

Расчет буфера фрактальной СМО, гарантирующего малую вероятность P потери заявки (например, $P \leq 10^{-8}$), требует при непосредственном ИМ неприемлемо высоких затрат времени, обусловленных необходимостью оценивать малую вероятность P при большой дисперсии длины очереди и длительных переходных процессах в системе.

Предлагаемый аналитико-имитационный подход является модификацией метода экстремальных статистик [8]. При малых P число отказов N_0 , которые произойдут за время данного периода непрерывной занятости (ПНЗ) системы с бесконечным буфером, если его заменить буфером объема m , можно определять по формуле

$$N_0 = \max\{Q_{\max} - m, 0\},$$

где Q_{\max} – максимальная длина очереди, достигаемая на этом ПНЗ при бесконечном буфере [8]. Формула позволяет по одному прогону модели с достаточно большим числом ПНЗ рассчитать общее число отказов сразу для многих значений m и получить соответствующие оценки $P = P(m)$ (рис. 2), сокращая тем самым время ИМ на два-три порядка. За пару секунд моделирования системы Pa|Pa|1 (из предыдущего раздела) формируется набор данных, позволяющий построить аппроксимацию зависимости $P(m)$. Так, на рис. 2 построены экспоненциальная (слева) и степенная аппроксимации.

В целом выясняется, что для фрактальных СМО степенные аппроксимации зависимости $P(m)$ весьма точны. Для упомянутой СМО Pa|Pa|1 экспоненциальный прогноз вероятности P на точку $m = 700$ дает $P^* = 1.1 \cdot 10^{-8}$, степенной – $P^* = 0.0022$, ИМ (при прогоне 1 млн. заявок) при $m = 700$ дает $P^* = 0.0024$. Возможно, для фрактальных СМО асимптотика $P(m)$ при $m \rightarrow \infty$ действительно степенная (заметим, что в системе M|M|n|m зависимость $P(m)$ асимптотически экспоненциальная). Из степенного уравнения $P = 0.5462m^{-0.8468}$ (рис. 2 справа) находим $m(P) = \exp(\ln(0.5462/P)/0.8468)$. Отсюда требуемый для $P = 10^{-8}$ объем буфера $m = \exp(\ln(0.5462 \cdot 10^8)/0.8468) = 1.4 \cdot 10^9$.

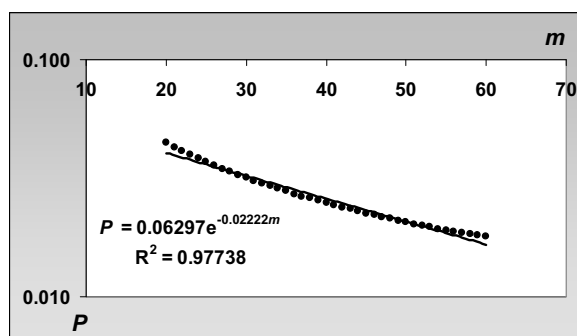


Рис. 2. Построение для $P(m)$ экспоненциального (слева) и степенного уравнений регрессии (шкалы P логарифмические; шкала m справа также логарифмическая; маркеры – данные ИМ)

Заключение

Предложенный подход к расчету буферов для узлов сетей с фрактальным трафиком позволяет определять размеры буферов с достаточной точностью, сокращая время ИМ на несколько порядков. Изложенные результаты позволяют применять этот подход к многоканальным СМО и исследовать эффекты суммирования/прореживания фрактальных потоков (в контексте задач буферизации), учитывая проблемы реализации фрактальных распределений. Эксперименты показывают, что зависимость вероятности P потери заявки от размера m буфера фрактальной СМО при $m \rightarrow \infty$ близка к степенной. Актуальна задача формального асимптотического анализа этой зависимости.

Литература

1. **Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В.** Фрактальные процессы в телекоммуникациях. / Под ред. О. И. Шелухина. М.: Радиотехника, 2003. 480 с.
2. **Столлинс В.** Современные компьютерные сети. СПб.: Питер, 2003. 784 с.
3. **William Stallings.** Интернет и телекоммуникации. URL: http://my.online.ru/it/press/cwm/19_97/world.htm (Дата обращения: 13.03.2010).
4. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
5. **Вишневский В. М.** Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
6. **Задорожный В. Н.** Аналитико-имитационные исследования Больших Сетевых Структур / В. Н. Задорожный. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. 208 с.
7. **Рыжиков Ю. И.** Компьютерное моделирование систем с очередями: курс лекций. СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. 164 с.
8. **Кутузов О. И., Задорожный В. Н., Олзоева С. И.** Имитационное моделирование сетей массового обслуживания: Учеб. пособие. Улан-Удэ: изд-во ВСГТУ, 2001. 228 с.