КАУЗАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – МЕТОД ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Ю. В. Березовская, В. А. Воробьёв (Архангельск)

Введение

Сложная система моделируется популяцией автоматов.

Популяция автоматов – это система взаимодействующих вероятностных автоматов (не обязательно одинаковых), в которых смена состояний отдельного автомата обусловлена состояниями некоторых других автоматов. А именно, состояния «воздействующих» автоматов влияют на «изменяемые» автоматы и переводят их в новые состояния, причём способ передачи воздействий и связи между автоматами не рассматриваются. Вместо этого принята гипотеза *сильного перемешивания*, т.е. автомат в данном состоянии находится в любом месте системы равновероятно. Автомат может, как обычно, менять состояние сам, а может зависеть от любого числа автоматов, находящихся в подходящих состояниях.

Популяции автоматов пригодны для исследования разнообразных массовых объектов: биологических, экономических, социальных и технических систем, параллельных программ [1–3]. С этой целью автоматы должны иметь стохастические характеристики – вероятности переходов в каждом такте. Поскольку число состояний популяции чрезвычайно велико, вычисления проводятся не для всех состояний популяции, а для среднего числа автоматов в различных состояниях. Таким образом, полученный случайный процесс представляет динамику популяции «в среднем».

Трудность состоит в том, что в известном методе динамики средних все компоненты независимы друг от друга. Между тем основное свойство, которое влияет на поведение популяции – взаимодействия между автоматами. Следует как-то учесть эти взаимодействия в методе динамики средних. В настоящей работе вводятся основные понятия, опирающиеся на теорию сетей Петри.

1. Каузальная сеть для популяции автоматов

Каузальная сеть – это маркированная сеть Петри, в которой для каждого перехода задана интенсивность события-перехода как функция от маркировки входных позиций перехода. Вид этих функций зависит от предметной области и задаётся отдельно в каждом конкретном случае. Потоки событий-переходов простейшие, т.е. стационарные (интенсивности меняются медленно), ординарные и без последействия.

Каузальная сеть – это двудольный граф $\boldsymbol{G} = \langle Q, D, \boldsymbol{In}, \boldsymbol{Out}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R} \rangle$, где

$Q = \{q_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ – множество позиций, соответствующее множеству состояний, на которых определены все автоматы;

$D = \{d_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ – множество переходов автоматов из состояния в состояние;

In – функция предшествования, ставит в соответствие каждой паре (q_i, d_j) неотрицательное число $k_{ij} \geq 0$, где k_{ij} – вес дуги из позиции q_i в переход d_j, если соответствующей дуги нет, $k_{ij} = 0$;

Out – функция следования, ставит в соответствие каждой паре (d_j, q_i) неотрицательное число $k_{ji} \geq 0$, где k_{ji} – вес дуги из перехода d_j в позицию q_i, если соответствующей дуги нет, $k_{ji} = 0$;

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}} = \{N_{it} \mid i=1, 2,\ldots, n\}$ – вектор маркировки, задающий число автоматов, находящихся в момент времени t в каждом из состояний множества Q;

$\boldsymbol{R} = \{p_j(\boldsymbol{M}_t(*d_j)) \mid j = 1, \ldots, m\}$ – вектор-функция интенсивностей переходов, определяющая среднее число срабатываний перехода d_j в течение одного такта или число таких срабатываний в единицу времени, зависящее от маркировки множества $*d_j$ – входных позиций перехода.

Позиция $q_0 \in Q$ называется внешней, имеет сколь угодно большое или единичное (если надо) значение маркера N_0, не меняет его при переходах и может не изображаться на рисунке графа. Состояния автоматов и позиции множества $\{q_i \mid i = 1, ..., n\}$ назовём собственными. Граф $\boldsymbol{G}$ изображает причинно-следственные связи между состояниями автоматов и интенсивности этих связей.

В отличие от канонической сети Петри множество весовых коэффициентов дуг каузальной сети – это положительные действительные числа, приписанные входным и выходным дугам j-го перехода: k_{ij} или k_{ji} соответственно. Точно так же мы будем допускать действительные числа в качестве маркеров N_i для позиций. Это позволит маркировать сеть вероятностями состояний автоматов и вообще избавиться от целых чисел. В таких случаях будем считать популяцию счётным множеством.

2. Каузальная модель

К-сеть является статической моделью популяции автоматов, она задаёт только причинно-следственные связи между элементами системы автоматов. Динамическая модель популяции – *К-модель* – определяется правилами функционирования К-сети. Функционирование К-сети подобно несущей сети Петри с учётом интенсивностей переходов, а именно: переход d_j срабатывает тогда и только тогда, когда маркировка его входа такова, что $\boldsymbol{M}(*d_j)) \geq \boldsymbol{In}(d_j)$. Каждый переход К-сети описывает множество допустимых изменений состояний автоматов, заданное его интенсивностью.

Компьютерное описание каузальной модели содержит: 1) статическую часть – маркировку $\boldsymbol{M}_0$ в начальный момент времени $t = 0$ и 2) динамическую часть – описание переходов. Каждый переход d_j описывается пятью выражениями:

1) перечисление множества $*d_j$ с коэффициентами k_{ij},
2) перечисление множества d_j* с коэффициентами k_{ji},
3) интенсивность $p_j(\boldsymbol{M}_t(*d_j))$ перехода,
4) тип перехода,
5) задержки s состояний (в качестве действующего или изменяемого состояния берется состояние автомата в момент времени $t - s$).

В общем случае описание перехода – это выражение вида $*d_j > d_j*$: $p_j(\boldsymbol{M}_t(*d_j))$:*тип перехода, задержки*. Тип перехода зависит от зоны действия и расположения автоматов в системе. *Линейный* переход соответствует дальнодействию в системе. Нелинейные переходы: *раствор* – равномерному распределению автоматов по всей системе (как медведи в тайге) и *смесь* – собранию взаимодействующих автоматов в одном месте (как птичий базар). Внешнее состояние в К-модели изображается звёздочкой «*».

3. Имитация поведения сложной системы

Для имитации поведения сложной системы разработа программа «Популяция», которая в каждый момент времени реализует срабатывание всех переходов. Пусть N – количество автоматов, n – число состояний, в которых может находиться каждый из автоматов. При этом каждый конкретный автомат не обязательно имеет все n состояний. В каждом i-м состоянии пребывает N_i автоматов, так что $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_\mathrm{n}$ (n – натуральное, N_i – неотрицательное действительное при $i = 1, \ldots, n$). Продемонстрируем процесс функционирования на примере простых популяций, где каждый переход можно описать предложением: состояние A переводит состояние B в состояние C с интенсивностью K. В каждом такте, т. е. через заданный промежуток времени, количество автоматов в j-м состоянии изменяется или остается тем же. Некоторое состояние i влияет на состояние j и переводит его в состояние k с интенсивностью $K(i,j,k)$. Множество всех таких интенсивностей – это трехмерный массив

$$P = \{K(i,j,k) \mid i = 1..n, j = 1..n, k = 1..n\}.$$

Это означает, что N_i автоматов, находящихся в состоянии i, влияют на N_j автоматов, находящихся в состоянии j, и переводит некоторое их количество M_{ijk} в состояние k.

При линейном взаимодействии $M_{ijk} = K(i,j,k)\cdot \min(N_i, N_j)$;

при взаимодействии в растворе при $i \neq j$: $M_{ijk} = K(i,j,k)\left(\dfrac{N_i N_j}{N}\right)$;

при взаимодействии в растворе при $i = j$: $M_{ijk} = K(i,j,k)\left(\dfrac{N_i N_j}{2N}\right)$;

при нелинейном взаимодействии в смеси: $M_{ijk} = K(i,j,k)\left(\dfrac{N_i N_j}{N_i + N_j}\right)$,

где $j = 1, ..., n$, т. е. одно i-е состояние может воздействовать на множество j-х. Соотношения $\left(\dfrac{N_i N_j}{N}\right)$, $\left(\dfrac{N_i N_j}{2N}\right)$ и $\left(\dfrac{N_i N_j}{N_i + N_j}\right)$ задают вероятность встречи автоматов в i-м и j-м состояниях в единичном объёме.

Итак, изменение количества N_{it} автоматов в такте t имеет вид:

$$N_i(t+1) = N_{it} + \Delta N_{it}$$

$$\Delta N_i = V_i - I_i + R_i.$$

V_i – число автоматов перешедших в i-е состояние в такте t:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\min(N_j, N_k)\cdot K(j,k,i)$$ – для линейного перехода;

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{N_j \cdot N_k}{N}\right)\cdot K(j,k,i)$$ – для перехода в растворе при $k \neq j$.

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{N_j \cdot N_k}{2N}\right)\cdot K(j,k,i)$$ – для перехода в растворе при $k = j$.

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{N_j \cdot N_k}{N_i + N_j}\right)\cdot K(j,k,i)$$ – для перехода в смеси.

I_i – число автоматов покинувших i-тое состояние в такте t:

$$I_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} min\left(N_i, min\left(N_j, N_i\right)\cdot K(j,i,k)\right)$$ – для линейного перехода;

$$I_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} min\left\{N_i, \left(\frac{N_j \cdot N_i}{N}\right)\cdot K(j,i,k)\right\}$$ – для перехода в растворе при $i \neq j$.

$$I_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \min\left\{N_i, \left(\frac{N_j \cdot N_i}{2N}\right)\cdot K(j,i,k)\right\}$$ – для перехода в растворе при $i = j$.

$$I_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \min\left(N_i, \left(\frac{N_j \cdot N_i}{N_i + N_j} \right) \cdot K(j,i,k) \right)$$ – для перехода в смеси.

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} N_j \cdot K(j,*,i)$$ – число автоматов, «родившихся» в i-м состоянии.

Чтобы получить среднее количество автоматов в каждом состоянии на (t+1)-м шаге, необходимо воспользоваться этими формулами t раз.

Несмотря на ограниченность данного подхода, класс моделируемых популяций включает множество интересных систем, допускающих множество интерпретаций в различных предметных областях. Имея программу «Популяция», достаточно описать поведение отдельных элементов исследуемой системы в их связи с другими элементами и получается модель, которая легко модифицируется и быстро даёт наглядные результаты. При этом будет представлено и поведение популяции в переходном режиме. А это уже немало в тех предметных областях, где господствуют качественные рассуждения. Особенно это касается гуманитарных наук.

Литература

1. **Воробьёв В. А., Кочнев А. И.** Популяционное моделирование коллективного поведения автоматов. // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2007. №18, август. Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов и школ, проводимых в ТГУ.
2. **Березовская Ю. В., Воробьёв В. А.** Популяционное моделирование населения Земли // Международная научная конференция по исторической демографии и исторической географии «Территория и население стран и континентов: история и современность». Сыктывкар, 2011.
3. **Воробьев В. А., Дербина Ю. В., Кочнев А. Ю**. Популяция автоматов – модель параллельной программы // Материалы VI Международного научно-практического семинара "Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах". СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 104–109.